Exercice n° 1

- $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}} = \dfrac{(1+i\sqrt{3}).(-i+\sqrt{3})}{(i+\sqrt{3}).(-i+\sqrt{3})}$

$= \dfrac{-i+\sqrt{3}+\sqrt{3}+3i}{1^2+\sqrt{3}^2}$

$= \dfrac{2\sqrt{3}+2i}{4}$

D'où :

$$\boxed{\frac{1+i\sqrt{3}}{i+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

- $(-1-i)^2.(1-i\sqrt{3}) = 2i\,(1-i\sqrt{3})$

$=2i + 2\sqrt{3}$

- $\dfrac{1}{i} + i = -i + i = 0$

- $(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})^3 = (-\dfrac{1}{2})^3 + 3(-\dfrac{1}{2})^2(i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

$+ 3(-\dfrac{1}{2})(i\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2 + (i\dfrac{\sqrt{3}}{2})^3$

$= -\dfrac{1}{8} + \dfrac{3\sqrt{3}}{8}i + \dfrac{9}{8} - i\dfrac{3\sqrt{3}}{8} = \dfrac{8}{8} = 1$

Donc : $\boxed{(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2})^3 = 1}$

Exercice n° 2

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

● 1) ▪ $j^2 = (\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})^2$

$= \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

↓ Formule de Moivre

Par suite on a : $j^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$

▪ $j^3 = (\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3})^3$

$= \cos\dfrac{6\pi}{3} + i\sin\dfrac{6\pi}{3} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi$

↓ Formule de Moivre

$= 1$

Par suite on a : $j^3 = 1$

▪ $j^4 = j^3 x\, j = 1x\, j = j$

2) Si $n = 3p$ alors $j^n = (j^3)^p = 1$, $p \in IN$

Si $n = 3p + 1$ alors $j^n = j^{3p} x j = j$, $p \in IN$

Si $n = 3p + 2$ alors $j^n = j^{3p} x j^2 = j^2 = \overline{j}$, $p \in IN$

● On a : $j^3 = 1$ donc $j^2 x\, j = 1$ et par suite $j^2 = \dfrac{1}{j}$

Or d'après la question 1) on a $j^2 = \overline{j}$

il en résulte : $j^2 = \overline{j} = \dfrac{1}{j}$

● $1 + j + j^2 = 1 + (j + \overline{j}) = 1 + 2Re(j)$

$= 1 + 2x(-\dfrac{1}{2}) = 1 - 1 = 0$

● $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$

On sait que : $1 + j + j^2 = 0$ donc $j^2 = -1 - j$ d'où

$a + bj + cj^2 = a + bj + c(-1-j) = a + bj - c - jc$

$= a - c + (b-c)j$

Donc $a + bj + cj^2 = 0 \Leftrightarrow a - c + (b-c)j = 0$

$\Leftrightarrow a - c = (c-b)j$

Exercice n° 3

$z = (m-i).[(10-m) + (2+m)i]$, $m \in IR$

● On a : $z \in IR \Leftrightarrow Im(z) = 0$

$z = m.(10-m) + m(2+m)i - i.(10-m) + 2 + m$

$= m.(10-m) + 2 + m + i.[m(2+m) - .(10-m)]$

Donc $Im(z) = 0 \Leftrightarrow m(2+m) - .(10-m) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0$

Résolution de l'équation : $m^2 + 3m - 10 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4x(-10) = 49$ et $\sqrt{\Delta} = 7$

y a deux valeurs du réel m tel que z est réel

ui sont : $m_1 = \dfrac{-3+7}{2} = 2$ et $m_2 = \dfrac{-3-7}{2} = -5$

● pour $m = 2$ on a $z = 20$

Pour $m = -5$ on a $z = -78$

Oarayth Aqra Blech Oarayth